

全国Ⅱ卷

【试题出处】2026 年高考数学全国Ⅱ卷第 1 题

【试题】

$$(1-3i)^2 =$$

A. $-8+6i$

B. $-8-6i$

C. $8+6i$

D. $8-6i$

【参考答案】 B

【考查目标】

试题考查复数的概念、复数的基本运算. 试题强调基础性, 立足于对基础知识和基本运算的考查.

【试题分析】

本题用复数的乘法运算法则计算.

本题中, $(1-3i)^2 = 1-6i+(3i)^2 = -8-6i$. 故选 B.

【试题亮点】

试题考查复数的概念及其基本运算法则, 体现了课标对复数学习的基本要求, 引导学生了解数系的扩充, 掌握复数的基本概念与基本运算, 同时避免繁琐的计算与技巧训练. 本题作为整套试卷的第 1 小题, 立足

课标, 计算量小, 考查指向明确, 考查基础内容, 利于学生得分. 特别地, 题目以学生熟悉的知识形态呈现, 有利于稳定学生情绪与考试心态, 助力学生正常发挥.

【试题出处】2026 年高考数学全国 II 卷第 2 题

【试题】

已知集合 $A = \{0, 1, 3, 6, 9\}$, $B = \{x \mid \sqrt{x} = x\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{3, 6\}$
C. $\{0, 1, 9\}$ D. $\{0, 3, 9\}$

【参考答案】 A

【考查目标】

试题考查集合的概念、集合的基本表示方法、集合的交的运算. 试题立足基础, 考查学生基本的逻辑推理能力和数学运算能力.

【试题分析】

本题的集合 B 是用描述法给出, 利用代数方程 $\sqrt{x} = x$ 给出集合的元素. 因此需要先求解方程.

由原方程可得 $x \geq 0$, 因此原方程可化为 $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = 1$. 因此集合 $B = \{0, 1\}$, 所以 $A \cap B = \{0, 1\}$. 故选 A.

【试题亮点】

列举法和描述法是两种常见的表示集合的方法, 前者将集合的所有元素一一列举出来, 后者则利用集合中全部元素的共同特征来表示集合.

本题分别用列举法和描述法表示两个集合，要求学生求出这两个集合的交集. 试题表述简洁规范，属于学生熟悉的知识范畴，突出基础性考查.

【试题出处】 2026 年高考数学全国 II 卷第 3 题

【试题】

已知向量 a, b 满足 $|a+b|=1$, $|a-b|=\sqrt{3}$, 则 $a \cdot b =$

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{2}$

【参考答案】 D

【考查目标】

试题考查向量的概念、向量的线性运算、向量的数量积等基础知识，考查学生的数学运算能力和化归与转化的思想.

【试题分析】

根据两个向量和的模与两个向量差的模，联立方程求得这两个向量的数量积.

由 $|a+b|=1$ 可得 $a^2+2a \cdot b+b^2=1$. 由 $|a-b|=\sqrt{3}$ 可得 $a^2-2a \cdot b+b^2=3$.

两式相减得 $4a \cdot b=-2$, 所以 $a \cdot b=-\frac{1}{2}$.

故选 D.

【试题亮点】

向量是数学中的基本概念，在包括数学、物理、计算机科学与技术、经济学等在内的众多学科都有广泛而重要的应用，同时是解决相关学科中各种问题的重要工具。试题考查向量的概念、向量的运算等知识，学生可以利用向量的代数运算求解。试题考查的内容源于教材，面向全体学生，立足基本概念和方法，属于简单题目。试题能让学生增强自信心，有利于学生正常发挥。

【试题出处】2026 年高考数学全国 II 卷第 4 题

【试题】

设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 经过点 $(1, 0)$ 和点 $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3\right)$ ，则

C 的渐近线方程为

A. $y = \pm 3\sqrt{2}x$

B. $y = \pm 2\sqrt{3}x$

C. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}x$

D. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{6}x$

【参考答案】 B

【考查目标】

试题考查双曲线渐近线的概念及其方程，考查学生的数学运算能力。

【试题分析】

由题设得
$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1, \\ \frac{7}{4a^2} - \frac{9}{b^2} = 1, \end{cases}$$
 解得 $a = 1, b = 2\sqrt{3}$, 所以渐近线方程为

$$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm 2\sqrt{3}x.$$

故选 B.

【试题亮点】

平面解析几何的学习要求学生能在平面直角坐标系中认识圆锥曲线的几何特征, 运用代数方法解决几何问题. 数形结合是解决平面解析几何问题的基本方法. 双曲线的渐近线方程反映了双曲线上远离坐标原点的点的横、纵坐标之间的近似比例关系, 也决定了双曲线图形开口大小以及在坐标系中所处的区域, 对于从几何上理解双曲线的性质有重要意义. 试题以双曲线为背景, 考查点在曲线上的含义以及双曲线渐近线的概念. 本题题干简洁, 设问明确, 解题思路清晰, 突出通性通法, 注重对基础知识和学科素养的考查.

【试题出处】2026 年高考数学全国 II 卷第 5 题

【试题】

已知棱台的上、下底面均是有一个内角为 60° 的菱形, 上、下底面的边长分别为 2, 3, 该棱台的高为 $\sqrt{3}$, 则其体积为

A. $\frac{19}{12}$

B. $\frac{19}{6}$

C. $\frac{19}{4}$

D. $\frac{19}{2}$

【参考答案】 D

【考查目标】

试题考查棱台的基本概念及其体积公式,考查学生的直观想象能力和数学运算能力.

【试题分析】

由题设可得棱台的上、下底面的面积分别为 $2 \times 2 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ 和 $3 \times 3 \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}$, 则棱台体积为

$$\frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \left(2 + \sqrt{2 \times \frac{9}{2} + \frac{9}{2}} \right) \sqrt{3} = \frac{19}{2}.$$

故选 D.

【试题亮点】

试题考查棱台的基础知识,考查学生对棱台体积公式的掌握. 试题背景简单,设问清晰,只需掌握菱形的面积公式,就可以利用棱台体积公式得到结果. 试题属于基础题型,难度不大,有利于学生正常发挥,有利于稳定学生考试心理.

【试题出处】 2026 年高考数学全国 II 卷第 6 题

【试题】

把甲、乙、丙、丁等 8 位员工分为 A, B 两个技术攻关组,要求每组 4 人,其中甲、乙同组,丙、丁不同组,则分组方案共有

- A. 10 种 B. 12 种 C. 16 种 D. 24 种

【参考答案】 C

【考查目标】

试题考查计数原理和排列组合知识，考查学生应用计数原理解决简单实际问题的能力和数学运算能力。

【试题分析】

思路1 按甲、乙同在A组或同在B组分为两类。

如果甲、乙同在A组，那么需要在丙、丁中选一位分在A组，再在另4位员工中选一位分在A组，剩下的4位员工分在B组，此时的分组方案共有 $2 \times 4 = 8$ 种。同样地，甲、乙同在B组的分组方案共有8种。

因此分组方案共有 $8 + 8 = 16$ 种，故选C。

思路2 按丙、丁分别在两个不同组分为两类。

若丙在A组且丁在B组，那么A组的另外三位成员可以是甲、乙及另4位员工中的一位，或另4位员工中的三位，此时的分组方案共有 $4 + 4 = 8$ 种。同样地，丙在B组且丁在A组的分组方案共有8种。

因此分组方案共有 $8 + 8 = 16$ 种，故选C。

【试题亮点】

试题选择学生熟悉的分组问题为情境设计了一个简单的计数问题。学生首先需要读懂题目，清楚分组要求，在此基础上结合基本计数原理和方法便可求得问题的答案。试题设计源于教材，考查内容紧扣基础，所设情境贴近学生实际，有助于提高学生的获得感并稳定学生考试心态。试题有效地考查了排列组合知识及分类计数的数学思想，考查了学生的数学应用素养和运算求解能力。

【试题出处】2026 年高考数学全国 II 卷第 7 题

【试题】

已知 α 为第二象限角, $3\sin 2\alpha \cos \alpha = 8\sin \alpha \cos 2\alpha$, 则 $\frac{1+\sin \alpha}{2-\cos \alpha} =$

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{5}{12}$

【参考答案】 C

【考查目标】

试题考查同角三角函数的基本关系式、三角函数恒等变换, 着重考查学生的逻辑推理能力和数学运算能力.

【试题分析】

根据所求表达式, 只要解出满足已知条件的 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, 然后代入所求表达式即可得到相应结果.

思路 1 因为 α 为第二象限角, 所以 $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$. 因为 $3\sin 2\alpha \cos \alpha = 8\sin \alpha \cos 2\alpha$, 所以 $6\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 8\sin \alpha (2\cos^2 \alpha - 1)$, 整理得 $\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$, 解得 $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 从而 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 代入得 $\frac{1+\sin \alpha}{2-\cos \alpha} =$

$$\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{2+\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}, \text{ 故选 C.}$$

思路 2 因为 α 为第二象限角, 所以 $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$. 因为 $3\sin 2\alpha \cos \alpha = 8\sin \alpha \cos 2\alpha$, 故 $\alpha \neq \frac{3\pi}{4}$, $\cos 2\alpha \neq 0$, 所以 $8\tan \alpha = 3\tan 2\alpha$.

由倍角公式得 $8\tan \alpha = 3 \times \frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha}$, 解得 $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$. 从而 $\cos \alpha = -2\sin \alpha$,

代入 $\frac{1+\sin \alpha}{2-\cos \alpha} = \frac{1+\sin \alpha}{2+2\sin \alpha} = \frac{1}{2}$. 故选 C.

思路3 因为 α 为第二象限角, 所以 $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$. 由 $3\sin 2\alpha \cos \alpha = 8\sin \alpha \cos 2\alpha$ 得 $5\sin \alpha \cos 2\alpha = 3(\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha) = 3\sin \alpha$. 所

以 $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 于是

$$\frac{1+\sin \alpha}{2-\cos \alpha} = \frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{2+\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}. \text{ 故选 C.}$$

【试题亮点】

三角函数恒等变换是高中数学的基础知识和主干内容. 要求学生能够熟练掌握三角函数恒等变换的公式和基本运算, 特别是正弦与余弦的倍角公式、两角和与差公式等.

试题以第二象限角 α 为对象, 构建 $3\sin 2\alpha \cos \alpha = 8\sin \alpha \cos 2\alpha$, 从而可以确定 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ 的取值, 最终求得所给关于 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ 表达式的大小.

试题的题干清晰明确, 表达方式为学生所熟悉. 试题题面中和解答中的数值简单, 计算量小, 而且预设有多条解题路径, 选择不同解法均可作答.

试题以核心知识为载体, 重点考查学生的逻辑推理能力和数学运算能力. 试题内容和考查方式均有利于引导高中数学教学重视核心基础知识和基本运算能力.

【试题出处】2026 年高考数学全国 II 卷第 8 题

【试题】

已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, $f(x) + f(x-2) = 0$, 且当 $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$ 时, $f(x) = x^2 + ax + b$, 则

A. $a = -2, b = -3$

B. $a = -2, b = 3$

C. $a = -4, b = -3$

D. $a = -4, b = 3$

【参考答案】 D

【考查目标】

试题考查函数的奇偶性、周期性等基本性质及应用, 考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养以及函数与方程、化归与转化、数形结合等数学思想.

【试题分析】

思路 1 因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(1) = f(-1)$. 又因为 $f(x) + f(x-2) = 0$, 所以 $f(-1) = -f(1)$. 从而 $f(1) = 0, f(3) = -f(1) = 0$.

又当 $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$ 时, $f(x) = x^2 + ax + b$, 故 $f(3) = 9 + 3a + b = 0$, 且

当 $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ 时, $f(x) = -(x+2)^2 - a(x+2) - b = -x^2 - (a+4)x - (2a+b+4)$. 因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 于是 $a+4=0$, 得 $a=-4$, 故 $b=-9-3a=3$.

故选 D.

思路 2 由 $f(x) + f(x-2) = 0$ 可得 $f(x) = -f(x-2) = f(x-4)$, 故 $f(x)$ 是周期为 4 的函数, 再由 $f(x)$ 是偶函数可得 $f(1) = 0$.

当 $x \in \left[-\frac{5}{2}, -1\right]$ 时, $f(x) = f(x+4) = x^2 + (a+8)x + 4a + b + 16$. 又 $f(x)$ 是偶函数, 故当 $x \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$ 时, $f(x) = x^2 - (a+8)x + 4a + b + 16$, 所以 $f(1) = 9 + 3a + b = 0$. 又因为当 $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$ 时, $f(x) = x^2 + ax + b$, 于是 $-(a+8) = a$, 解得 $a = -4$, $b = -9 - 3a = 3$.

故选 D.

思路 3 由 $f(x)$ 是偶函数及 $f(x) + f(x-2) = 0$ 可得 $f(x) + f(2-x) = 0$, 所以 $y = f(x)$ 关于点 $(1, 0)$ 中心对称. 因而 $f(1) = 0$.

再由 $f(x) + f(2-x) = 0$ 可得当 $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 时, $f(x) = -f(2-x) = -x^2 + (a+4)x - 4 - 2a - b$. 又 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $a+4=0$ 以及 $0 = f(1) = f(-1) = -9 - 3a - b$, 解得 $a = -4$, $b = 3$.

故选 D.

【试题亮点】

函数是现代数学的基本概念, 是描述客观世界中变量关系和规律的基本的数学语言, 是解决数学问题的主要工具, 同时也是贯穿高中数学课程的主线. 函数的概念与思想方法已渗透到数学的各个领域, 是进一步学习数学的重要基础.

函数的解析表达式是函数重要的形式, 刻画了变量关系和函数性质. 试题给出函数在较小区间的解析表达式, 利用设置的条件, 可得到函数在整个定义域上的解析表达式. 学生不用写出函数在整个定义域上的解析表达式, 可利用题中所给的特殊性质得到两个待定参数的值, 这要求学生对函数的奇偶性、周期性有较深入的理解和掌握. 如果学生能注意到区间 $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ 长度大于 1, 函数周期为 4, 并能作恰当的平移, 那么将能建立起两个关于待定参数的方程, 完

成解答.

试题描述简洁清楚、指向明确,对思维层次有较高要求.试题重视对函数性质的综合运用,考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养以及函数与方程、化归与转化、数形结合等数学思想,体现高考服务选才的核心功能.

【试题出处】 2026 年高考数学全国 II 卷第 9 题

【试题】

已知 $\odot O: x^2+y^2=1$, $\odot A: x^2+y^2-6x-8y+k=0$, 则

- A. 点 A 的坐标为 $(-3, -4)$
- B. 当 $k=9$ 时, $\odot A$ 与 x 轴相切
- C. 当 $k=-11$ 时, $\odot O$ 与 $\odot A$ 相切
- D. 当 $\odot O$ 与 $\odot A$ 相交时, 两个交点所在直线的方程为 $6x+8y-k-2=0$

【参考答案】 BC

【考查目标】

试题基于圆的一般方程,考查学生运用代数方法认识圆的性质以及其位置关系的能力.试题着重考查学生的直观想象、数学运算等核心素养以及数形结合等数学思想.

【试题分析】

试题选项涉及圆心坐标,直线与圆、圆与圆的位置关系,圆的相交弦的方程.学生可先通过圆的一般方程配方得到圆心坐标,然后利用相关判定方法和直线与方程的基础知识进行作答.

由已知可得 $\odot A$ 的方程为 $(x-3)^2+(y-4)^2=25-k$, 故圆心 A 的坐标为 $(3, 4)$. 故选项A错误.

由于 $\odot A$ 的圆心在 $(3, 4)$, 当 $k=9$ 时, $\odot A$ 半径为4, 因此 $\odot A$ 与 x 轴相切. 故选项B正确.

因为 $\odot O$ 的半径为1, 当 $k=-11$ 时, $\odot A$ 的半径为6, $OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$, 所以 $\odot O$ 与 $\odot A$ 内切. 故选项C正确.

当 $\odot O$ 与 $\odot A$ 相交时, 将 $\odot O$ 和 $\odot A$ 的方程相减可得 $6x+8y-k-1=0$, 故两个交点在直线 $6x+8y-k-1=0$ 上, 因此两个交点所在直线的方程为 $6x+8y-k-1=0$. 故选项D错误.

综上, 正确选项为B和C.

【试题亮点】

直线的方程、圆的方程以及圆与圆、直线与圆的位置关系是平面解析几何的核心内容, 也是感悟平面解析几何蕴含的数学思想的重要载体. 试题基于圆的一般方程, 考查学生运用代数方法认识圆心和半径等基础知识的能力. 若学生能基于圆心和半径作图, 便能很快判断前三个选项是否正确. 利用直线与圆的基本知识便能判断选项D是否正确. 这要求学生对于圆相关的基本概念、基本原理、基本方法有较深刻的理解, 并对教材的知识能融会贯通.

试题题干简洁, 选项设置基础全面, 计算量小. 学生若对直线与圆的基本概念、基本原理、基本方法有较好的掌握, 便能正确作答. 试题重视基础, 能让大多数学生都有获得感, 有利于引导中学教学.

【试题出处】2026 年高考数学全国 II 卷第 10 题

【试题】

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq 1$, $a_1 > 0$, $2a_3 = a_1 + a_2$, 记其前 n 项和为 S_n , 则

A. $q = -\frac{1}{2}$

B. $S_n > \frac{2a_1}{3}$

C. $2S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$

D. $\sum_{k=1}^n S_k > \frac{2na_1}{3}$

【参考答案】 ACD

【考查目标】

试题考查等比数列的概念、通项公式与前 n 项和公式等基础知识, 考查学生的逻辑推理能力与数学运算能力.

【试题分析】

利用等比数列的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$, 将题设条件 $2a_3 = a_1 + a_2$ 转化为关于公比 q 的方程 $2q^2 = 1 + q$, 解得 $q = 1$ (舍去), $q = -\frac{1}{2}$. 故选项 A 正确.

利用等比数列前 n 项和公式 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 得到 $S_n = \frac{2a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right]$.

因为当 n 是偶数时不满足 $S_n > \frac{2a_1}{3}$, 故选项 B 错误.

选项 C 既可以利用等比数列前 n 项和公式代入验证, 也可以利用 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 和等比数列的定义来获得 S_{n+2} , S_{n+1} , S_n 之间的关系.

(1) 由 $S_n = \frac{2a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right]$ 得

$$2S_{n+2} - S_{n+1} - S_n = \frac{2a_1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right] = 0.$$

(2) 利用 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 和等比数列的定义得

$$\frac{S_{n+2} - S_{n+1}}{S_{n+1} - S_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = -\frac{1}{2}, \text{ 整理得 } 2S_{n+2} = S_{n+1} + S_n.$$

故选项 C 正确.

由于 $S_n = \frac{2a_1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$, 可得

$$\sum_{k=1}^n S_k = \frac{2a_1}{3} \left[n - \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right] = \frac{2a_1}{3} \left\{ n + \frac{1}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] \right\} > \frac{2na_1}{3}.$$

故选项 D 正确.

【试题亮点】

数列是高中数学的主干内容和必备知识, 是考查学生关键能力与数学核心素养的良好载体.

本题以等比数列为载体, 考查学生对等比数列的概念与前 n 项和公式等基础知识掌握的程度, 考查逻辑推理与数学运算能力. 题设条件 $2a_3 = a_1 + a_2$ 等价于 $2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, 后者与选项 C 中设置的前 n 项和之间的关系一致. 对于公比为 $q (q \neq 1)$ 的等比数列 $\{a_n\}$, 若 $a_{n+2} = (t+1)a_{n+1} - ta_n$, 其中 $t \neq 1$, 则有 $S_{n+2} = (t+1)S_{n+1} - tS_n$. 证明过程与本题选项 C 的解答相同. 通过 $a_{n+2} = (t+1)a_{n+1} - ta_n$ 得到 $q^2 = (t+1)q - t$, 解得 $q = 1$ (舍去),

$q = t$. 于是 $\frac{S_{n+2} - S_{n+1}}{S_{n+1} - S_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = t$, 整理即得到 $S_{n+2} = (t+1)S_{n+1} - tS_n$.

此选项的设置既能引导学生探索未知, 又能感受到数学之美. 同时题目只涉及等比数列的定义和前 n 项和公式, 容易发现前述规律, 有利于增强学生在考场上的信心.

选项 B 和选项 D 可以做类比, 选项 B 是关于单项的性质, 选项 D 是关于部分和的性质或者是关于整体平均的性质. 单项未必满足某种性质,

但在平均意义下可能满足某种性质. 这反映了数学中蕴含的辩证统一的哲学思想.

试题题干简洁, 设问明确, 解题思路清晰, 引导学生探索未知, 感受数学之美. 试题源于教材中等比数列的定义, 能科学合理地引导教学, 引导学生回归课标、回归课堂, 落实基础性、综合性考查要求.

【试题出处】 2026 年高考数学全国 II 卷第 11 题

【试题】

已知抛物线 $E: y^2 = 8x$, 斜率为 $k(k > 0)$ 的直线 l 经过点 $(-1, 0)$, 等边三角形 ABC 的顶点 A 在 E 上, 顶点 B, C 均在 l 上. 下列结论正确的有

- A. E 的准线方程为 $x = -2$
- B. 若 l 与 E 没有公共点, 则 $k > \sqrt{2}$
- C. 若 l 与 E 的唯一公共点为 B , 则 E 的焦点在直线 AB 上
- D. 若 $k = 2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{15}$

【参考答案】 ABD

【考查目标】

试题考查抛物线的标准方程, 直线与抛物线的基础知识, 点到直线的距离, 曲线的切线, 并考查学生的逻辑思维能力和数学运算能力.

【试题分析】

思路 1 由题设可得抛物线的焦点为 $F(2, 0)$, 准线方程为 $x = -2$, 故选项 A 正确.

直线 l 的方程为 $y = k(x+1)$, 联立抛物线方程得 $\begin{cases} y = k(x+1) \\ y^2 = 8x \end{cases}$, 所

以 $k^2x^2 + 2(k^2-4)x + k^2 = 0$. 当 l 与 E 没有公共点时, $4(k^2-4)^2 - 4k^4 < 0$, 即 $k^2 > 2$. 由于 $k > 0$, 所以 $k > \sqrt{2}$, 故选项 B 正确.

若 l 与 E 的唯一公共点为 B , 从而 $k = \sqrt{2}$, 即 $x^2 - 2x + 1 = 0$, 解得 $x = 1$, 故点 $B(1, 2\sqrt{2})$.

记 $(-1, 0)$ 为点 M , 计算 $\cos \angle MBF$. 若 E 的焦点在直线 AB 上, 则有 $\cos \angle MBF = \frac{1}{2}$ 或 $\cos \angle MBF = -\frac{1}{2}$. 然而由 $\overrightarrow{BM} = (-2, -2\sqrt{2})$,

$\overrightarrow{BF} = (1, -2\sqrt{2})$ 得 $\cos \angle MBF = \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{BM}| \cdot |\overrightarrow{BF}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 故选项 C 错误.

若 $k = 2$, 则直线 l 的方程为 $2x - y + 2 = 0$, 要使得 $\triangle ABC$ 的面积最小, 只要点 A 到直线 l 的距离最小即可.

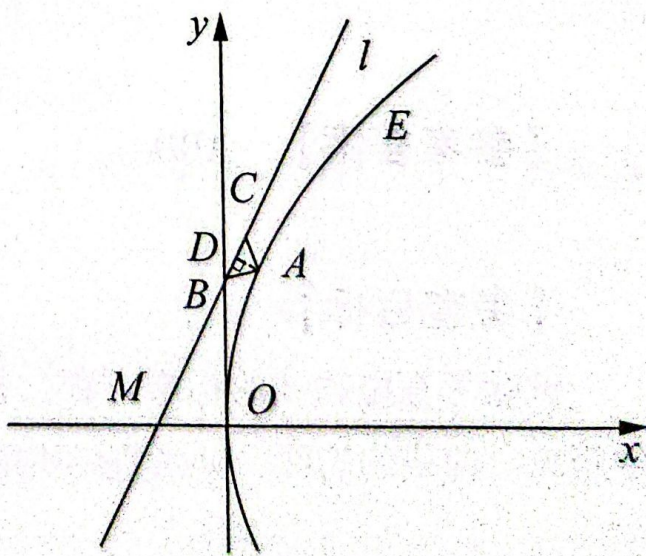
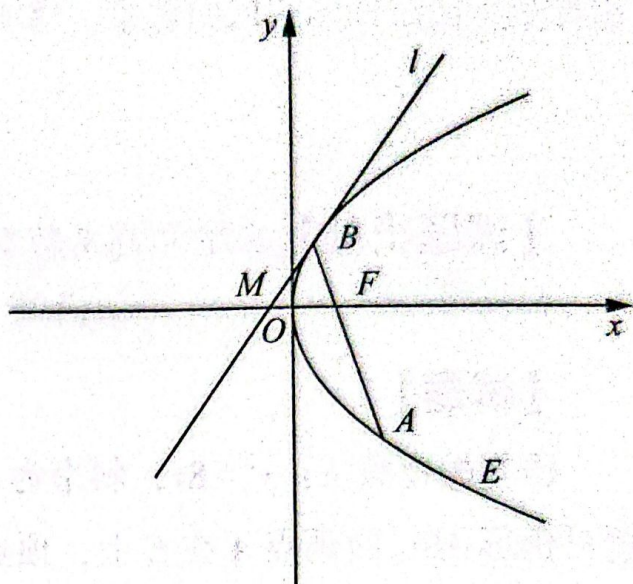
设点 $A\left(\frac{y^2}{8}, y\right)$, 当 $k = 2$ 时, 点 A 到直线 l 的距离为

$$\frac{\left|2 \times \frac{y^2}{8} - y + 2\right|}{\sqrt{5}} = \frac{|y^2 - 4y + 8|}{4\sqrt{5}} = \frac{(y-2)^2 + 4}{4\sqrt{5}},$$

其最小值为 $\frac{1}{\sqrt{5}}$, 此时 $\triangle ABC$ 面积为

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{15}, \text{ 故选项 D 正确.}$$

综上, 本题的正确选项为 ABD.



思路 2 由题设可得抛物线的焦点为 $F(2, 0)$, 准线方程为 $x = -2$, 因此选项 A 正确.

抛物线在切点为 $(x_0, y_0) (y_0 > 0)$ 的切线方程为 $y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_0}}x + \sqrt{2}\sqrt{x_0}$. 若

该切线过点 $(-1, 0)$, 则 $\frac{1}{\sqrt{x_0}} = \sqrt{x_0}$, 解得 $x_0 = 1$, 所以该切线斜率为 $\sqrt{2}$.

所以当 $k > \sqrt{2}$ 时, l 与 E 没有公共点. 故选项 B 正确.

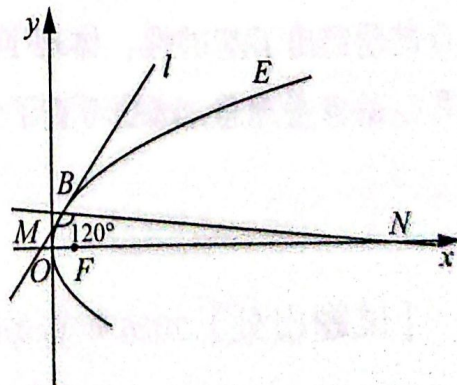
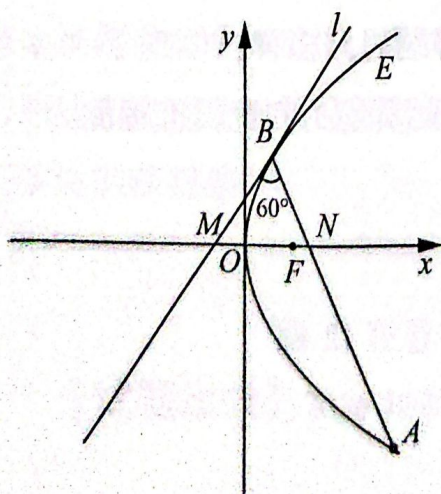
若 l 与 E 的唯一公共点为 B , 由以上可知点 $B(1, 2\sqrt{2})$. 设直线 AB 与 x 轴的交点为 N , $(-1, 0)$ 为点 M . 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以 $\angle NBM = 60^\circ$ 或 $\angle NBM = 120^\circ$. 又 $\tan \angle NMB = k = \sqrt{2}$, 故直线 AB 斜率为

$\tan(\angle NBM + \angle BMN) = \frac{\tan \angle NBM + \tan \angle BMN}{1 - \tan \angle NBM \cdot \tan \angle BMN}$, 从而直线 AB 的斜率为

$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{6}}$ 或 $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{6}}$. 故直线 AB 的方程为 $y = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{6}}(x - 1) + 2\sqrt{2}$ 或 $y =$

$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{6}}(x - 1) + 2\sqrt{2}$. 因此抛物线的焦点 $F(2, 0)$ 不在直线 AB 上. 故选项

C 错误.



设抛物线的切线斜率为 2 的切点为 (x_0, y_0) , 则 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_0}} = 2$, 所以 $x_0 =$

$\frac{1}{2}$, $y_0=2$. 因为直线 l 的方程为 $2x-y+2=0$, 所以点 (x_0, y_0) 到 l 的距离

$$\frac{\left|2 \times \frac{1}{2} - 2 + 2\right|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ 即抛物线上的点到 } l \text{ 的距离的最小值为 } \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ 所以 } \triangle ABC$$

面积的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{15}$, 故选项 D 正确.

综上, 本题的正确选项为 ABD.

【试题亮点】

试题以抛物线为背景, 结合直线与抛物线的位置关系, 构造了一个与等边三角形相关的问题. 选项 A 考查抛物线的标准方程中参数 p 的几何意义, 这是基础知识. 选项 B 考查直线与抛物线的位置关系. 抛物线既看成是圆锥曲线, 也可以看成是二次函数, 这样就会有两种方法, 即判别式法和切线法. 选项 C 与选项 B 有紧密联系, 当直线与抛物线相切时, 就是选项 C 的问题, 在具体计算时, 利用向量可以减少运算量, 也可以求出直线 AB 的方程, 再判断焦点 F 是否在直线 AB 上. 选项 D 是最值问题, 其实质也是直线与抛物线的位置关系问题, 只不过换了一条斜率为 2 的直线. 所以选项 D 与选项 B 一样有两种方法.

试题突出了基础性, 体现了综合性. 解题思路多样, 体现了“多想少算”的考查理念. 试题考查了学生的数学运算能力和逻辑推理能力.

【试题出处】2026 年高考数学全国 II 卷第 12 题

【试题】

记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1 = -1$, $a_4 = 5$, 则 $S_6 =$

【参考答案】 24

【考查目标】

试题考查等差数列的概念、通项公式以及前 n 项和公式等基本内容, 并考查学生的逻辑推理能力和数学运算能力.

【试题分析】

根据等差数列的定义和题设条件得到 $\begin{cases} a_1 = -1, \\ a_4 = a_1 + 3d = 5, \end{cases}$ 解得 $d = 2$. 再根

据等差数列前 n 项和公式 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, 得 $S_6 = 6a_1 + 15d = -6 + 30 = 24$.

【试题亮点】

试题给出等差数列的两项的值, 求等差数列的前 6 项和. 等差数列由首项和公差完全决定, 一般两个条件就可以完全确定一个等差数列. 学生通过题设给出的两个条件, 求出首项与公差, 再利用等差数列的前 n 项和公式即可获得所求问题的结论.

试题面向全体学生, 条件简洁, 指向明确, 学生只需掌握等差数列的概念和通项公式便可得出正确的结果, 有利于增加学生的自信心, 提高学生的获得感.

【试题出处】2026 年高考数学全国 II 卷第 13 题

【试题】

若函数 $f(x) = 2^x + 2^{2-x} - m$ 有两个零点, 则 m 的取值范围是_____.

【参考答案】 $(4, +\infty)$

【考查目标】

试题考查学生对不等式解集概念的理解, 不等式的性质、不等式求解方法的掌握情况. 试题考查判定函数单调性以及是否存在零点的基本方法.

【试题分析】

试题以函数有两个零点为已知条件, 根据函数表达式特点, 利用基本不等式可知函数有唯一的最小值, 再根据函数性质可知 m 的取值满足条件是充分必要的, 因此可得试题结论.

函数 $f(x) = 2^x + 2^{2-x} - m$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

思路1 令 $t = 2^x (t > 0)$, $g(t) = t + \frac{4}{t} - m$, 则 $g(t) \geq 2\sqrt{t \times \frac{4}{t}} - m = 4 - m$,

当且仅当 $t = 2$ 时, $g(t)$ 取得最小值 $4 - m$. 又 $g'(t) = 1 - \frac{4}{t^2}$, 则当 $t \in (0, 2)$ 时, $g'(t) < 0$, $g(t)$ 单调递减, 当 $t \in (2, +\infty)$ 时, $g'(t) > 0$, $g(t)$ 单调递增.

由于 $f(x)$ 与 $g(t)$ 零点个数相同, $f(x)$ 有两个零点等价于 $4 - m < 0$. 因此满足条件的 m 的取值范围是 $(4, +\infty)$.

思路2 注意到 $f(x) = 2^x + 2^{2-x} - m = 2^x + \frac{4}{2^x} - m \geq 2\sqrt{2^x \times \frac{4}{2^x}} - m = 4 - m$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立. 从而当 $m \leq 4$ 时, 函数 $f(x)$ 至多有一个零点.

对 $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{2-x} \ln 2$. 由 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$, 则当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 当 $m > 4$ 时, $f\left(\log_2 \frac{4}{2m}\right) > 2^{2-\log_2 \frac{4}{2m}} - m = m > 0$, $f(1) = 4 - m < 0$, $f(\log_2 m + 1) > 2^{\log_2 m + 1} - m = m > 0$, 从而函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\log_2 \frac{4}{2m}, 1\right)$ 和区间 $(1, \log_2 m + 1)$ 各只存在一个零点. 因此满足条件的 m 的取值范围是 $(4, +\infty)$.

【试题亮点】

相等关系、不等关系是数学中最基本的数量关系，是构建方程、不等式的基础。基本不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a, b \geq 0$)是常用的不等关系。试题考查学生对基本不等式和是否存在函数零点的掌握情况，考查灵活应用所学不等式知识的能力。试题的计算量小，体现出“多想少算”的考查理念。

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅱ卷第14题

【试题】

已知球 O 的体积为 $4\sqrt{3}\pi$ ， A, B, C, D 四点均在球 O 的球面上， $\triangle ABC$ 为等边三角形， $DA = DB = DC = \sqrt{2}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____。

【参考答案】 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

【考查目标】

试题通过 A, B, C, D 四点均在球 O 的球面上构建空间几何体，考查球的基本概念和几何性质，以及学生的空间想象能力、逻辑推理能力和数学运算能力。

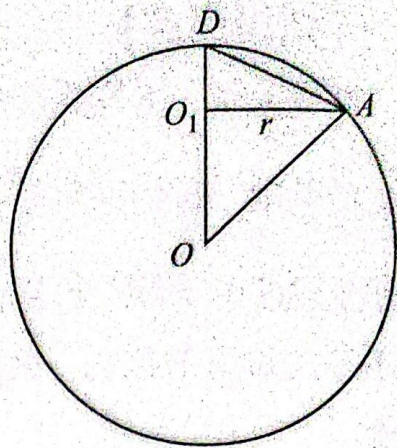
【试题分析】

思路1 设 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 O_1 ，半径为 r 。由题设可得球 O 的半径为 $\sqrt{3}$ ，且 D, O, O_1 三点共线。因为 $DA = \sqrt{2} < \sqrt{3}$ ，所以 D, O, O_1 的位置关系如下图所示。

$$\text{因此} \begin{cases} r^2 = 2 - (\sqrt{3} - OO_1)^2, \\ r^2 = 3 - OO_1^2, \end{cases} \text{解得 } OO_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$r = \frac{\sqrt{15}}{3}$. 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以其

$$\text{面积 } S = 3 \times \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$



思路 2 设 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 O_1 , 半径为 r . 由题设可得球 O 的半径为 $\sqrt{3}$, 且 D, O, O_1 三点共线. 因为 $DA = \sqrt{2} < \sqrt{3}$, 所以 $\angle AOD$ 是锐角.

在 $\triangle AOD$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle AOD = \frac{OA^2 + OD^2 - DA^2}{2OA \cdot OD} = \frac{2}{3}$, 所以

$$\sin \angle AOD = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ 所以 } r = OA \cdot \sin \angle AOD = \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 所以其面积 $S = 3 \times \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$.

【试题亮点】

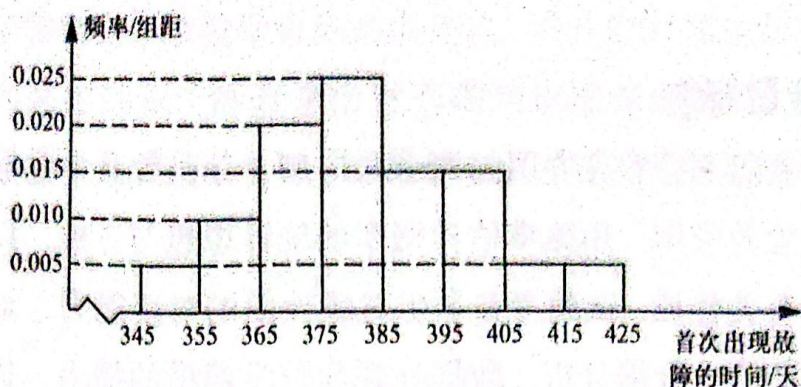
球是基本的几何体, 是中学数学的必修内容, 试题给出了球面上的四个点, 需要学生正确认识四个点在球面上相对位置, 进而将问题转化为平面问题. 试题体现课标的要求, 聚焦学生学习实际. 试题以球为载体, 重视对直观想象、逻辑推理和数学运算等核心素养的考查, 能够启发学生深入认识问题的本质, 分析问题和解决问题.

【试题出处】 2026 年高考数学全国 II 卷第 15 题

【试题】

从某厂生产的某种电子产品中随机抽取了若干件进行试验, 测试它

们首次出现故障的时间(单位:天),由试验结果得到如下频率分布直方图:



(1) 估计这种电子产品首次出现故障的时间的第一四分位数及中位数(假设数据在组内均匀分布);

(2) 记 $\hat{p}$ 为 1 件这种电子产品首次出现故障的时间小于 365 天的概率的估计值.

(i) 求 $\hat{p}$;

(ii) 该厂向某用户销售 100 件这种电子产品, 记 X 为这 100 件电子产品中首次出现故障的时间小于 365 天的件数, 假设 $X \sim B(100, \hat{p})$, 求 $E(X)$, $D(X)$.

【参考答案】

(1) 由频率分布直方图, 样本的第一四分位数为

$$365 + 10 \times \frac{0.25 - 0.15}{0.2} = 370,$$

故这种电子产品首次出现故障时间的第一四分位数的估计值为 370 天.

样本的中位数为

$$375 + 10 \times \frac{0.5 - 0.35}{0.25} = 381,$$

故这种电子产品首次出现故障时间的中位数的估计值为 381 天.

(2) (i) 由频率分布直方图, 这种电子产品首次出现故障的时间小于 365 天的频率为 0.15, 故 $\hat{p} = 0.15$.

(ii) 由已知 $X \sim B(100, 0.15)$, 故

$$E(X) = 100 \times 0.15 = 15, D(X) = 100 \times 0.15 \times 0.85 = 12.75.$$

【考查目标】

试题考查频率分布直方图的概念与应用、分位数及中位数等样本数字特征的概念与应用, 用频率估计概率的统计思想与方法, 以及二项分布的概念及有关性质. 试题考查学生对统计图的解读能力, 从统计图中提取信息的能力, 数据分析、数据处理和数学建模的能力, 以及数学运算的能力.

【试题分析】

(1) 根据第一四分位数、中位数的定义, 通过频率分布直方图即可得出结果.

(2) 先根据频率分布直方图得出 $\hat{p}$, 再由二项分布的性质计算 $E(X)$, $D(X)$.

【试题亮点】

在工农业生产中, 有大量的数据处理问题, 这就需要应用各种统计知识与方法进行处理. 试题以电子产品首次出现故障的时间数据为情境设计简单的数据处理问题. 通过试验得到一批电子产品的首次出现故障的时间数据, 并整理得到频率分布直方图, 重点考查学生对频率分布直方图解读及从中提取信息的能力, 并进一步要求对总体的分位数、中位数给出估计. 试题的问题(2)实际上是求 $E(X)$, $D(X)$ 的估计值, 这是由于 $\hat{p}$ 为 1 件电子产品首次出现故障的时间小于 365 天的概率 p 的估计值. 试题包含如下亮点.

(1) 试题设计的情境真实, 贴近生产与生活, 兼具现实意义与研究价值, 能很好地体现数学及统计知识的应用价值. 试题体现了对问题情境抽象转化为数学问题过程的考查. 学生通过对本题的作答能体会到统

计思想与方法在解决实际问题中的应用.

(2)突出对基础知识的考查.试题中涉及的分位数、中位数、频率及二项分布等都是中学数学中的基础知识.设计的问题重点考查学生的基本技能和基础知识,需要学生对基础知识准确理解,对基本概念、基本原理和基本方法熟练掌握.试题着重于考查学生的思维品质和学科素养.

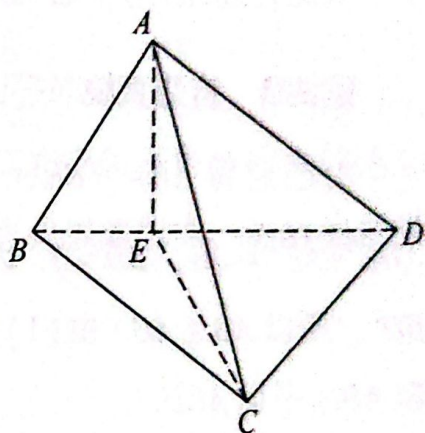
【试题出处】2026年高考数学全国Ⅱ卷第16题

【试题】

如图,三棱锥 $A-BCD$ 中,点 E 在 BD 上, $AE \perp CE$, $AE \perp DE$, $CD \perp AD$.

(1)证明: $CD \perp AB$;

(2)若 $DE=2$, $BE=1$, $AE=\sqrt{2}$, $CD=2\sqrt{3}$,求直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值.



【参考答案】

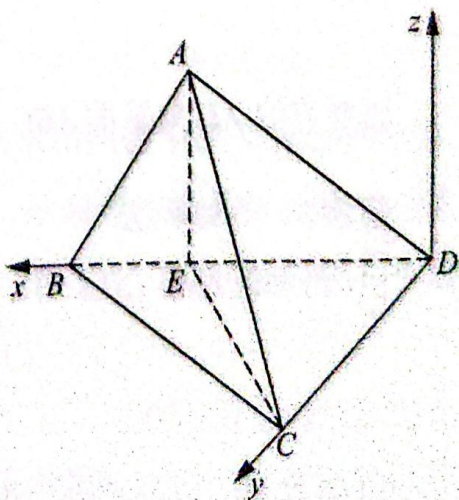
(1)因为 $AE \perp DE$, $AE \perp CE$, 所以 $AE \perp$ 平面 ECD , 故 $AE \perp CD$.

又因为 $CD \perp AD$, 所以 $CD \perp$ 平面 ABD , 从而 $CD \perp AB$.

(2)解法1 建立空间直角坐标系.

由(1)知 $CD \perp DE$, 以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DB}$ 的方向为 x 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$, 则

$D(0, 0, 0)$, $C(0, 2\sqrt{3}, 0)$, $A(2, 0,$



$\sqrt{2}$), $B(3, 0, 0)$, $\overrightarrow{DA} = (2, 0, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{CA} = (2, -2\sqrt{3}, \sqrt{2})$, $\overrightarrow{CB} = (3, -2\sqrt{3}, 0)$.

设 $m = (x, y, z)$ 是平面 ABC 的法向量, 则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{CA} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \end{cases}$ 即

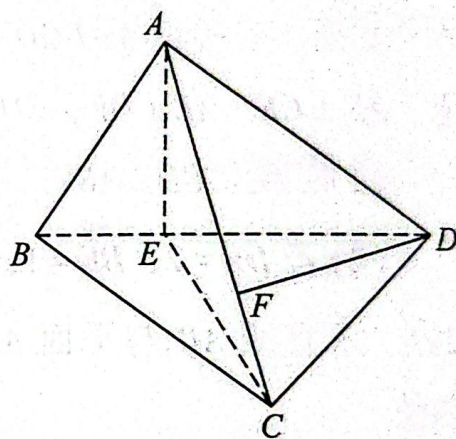
$\begin{cases} 2x - 2\sqrt{3}y + \sqrt{2}z = 0, \\ 3x - 2\sqrt{3}y = 0, \end{cases}$ 那么可取 $m = (2, \sqrt{3}, \sqrt{2})$. 所以 $\cos \langle \overrightarrow{DA}, m \rangle =$

$$\frac{\overrightarrow{DA} \cdot m}{|\overrightarrow{DA}| \cdot |m|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

因此直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

解法 2 构造直线与平面所成的角.

由题意得 $AB = \sqrt{BE^2 + AE^2} = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{DE^2 + AE^2} = \sqrt{6}$, $BD = 3$. 因为 $AB^2 + AD^2 = BD^2$, 所以 $AB \perp AD$. 由(1)知 $AB \perp CD$, 所以 $AB \perp$ 平面 ACD .



在 $\triangle DAC$ 中, 作 $DF \perp AC$, 垂足为 F .

由 $AB \perp$ 平面 ACD 得 $AB \perp DF$, 所以 $DF \perp$ 平面 ABC , 因此 $\angle DAF$ 即为直线 AD 与平面 ABC 所成的角.

因为 $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 3\sqrt{2}$, 所以 $\sin \angle DAF = \frac{DF}{AD} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

因此直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

解法 3 等体积法.

由(1)和题意得 $CD \perp BD$, $BD = 3$, 所以三棱锥 $A-BCD$ 的体积

$$V_{A-BCD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}.$$

由题意得 $AB = \sqrt{BE^2 + AE^2} = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 3\sqrt{2}$, $BC =$

$\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{21}$. 因为 $AB^2+AC^2=BC^2$, 所以 $AB \perp AC$.

设 D 到平面 ABC 的距离为 h , 则三棱锥 $D-ABC$ 的体积

$$V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 3\sqrt{2}h = \frac{\sqrt{6}}{2}h.$$

由 $V_{D-ABC} = V_{A-BCD}$ 得 $h=2$.

记直线 AD 与平面 ABC 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{h}{AD} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

因此直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

【考查目标】

试题以学生熟悉的三棱锥为载体, 通过考查线线垂直、线面垂直、线面所成角的构建等基础知识和基本方法, 以及空间直角坐标系的建立和空间向量的坐标表示与运用, 考查学生的直观想象能力、逻辑推理能力和数学运算能力.

【试题分析】

(1) 证明空间中两直线垂直的关键是: 证明一条直线垂直于另外一条直线所在的平面. 试题要求证明 $CD \perp AB$, 而题设给出了 $CD \perp AD$, 自然选择证明直线 CD 垂直于直线 AB 所在的平面 ABD . 结合题设条件, 根据线面垂直的判定定理进行推导论证即可.

(2) 思路1 建立空间直角坐标系.

首先建立适当的空间直角坐标系, 然后求出问题中涉及的点的坐标, 进而得到直线的方向向量和平面的法向量, 最后利用向量数量积公式求出直线的方向向量与平面的法向量所成角的余弦值, 也就是直线与平面所成角的正弦值.

思路2 构造直线与平面所成的角. 关键在于对线面垂直的判定定理和性质定理的熟练掌握以及在较复杂图形中的灵活应用, 难点在于找到

点 D 在平面 ABC 的投影. 试题中只需在 $\triangle DAC$ 作 $DF \perp AC$, 结合线面垂直的判定定理和性质定理可证明垂足 F 即为点 D 在平面 ABC 的投影, 因此 $\angle DAF$ 即为直线 AD 与平面 $\angle ABC$ 所成的角.

思路 3 等体积法. 试题中容易求出 AD , 要得到直线 AD 与平面 $\angle ABC$ 所成的角的正弦值, 只需求出点 D 到平面 ABC 的距离. 利用三棱锥 $A-BCD$ 和三棱锥 $D-ABC$ 的体积相等这一事实, 结合题设条件, 即可求出点 D 到平面 ABC 的距离.

【试题亮点】

试题以学生熟悉在三棱锥为背景, 聚焦立体几何的基本概念和基本方法, 题干简洁, 分层设问, 难度适中, 解法多样, 使学生的不同思维都得到充分发挥. 试题所涉及的线线、线面和面面等关系, 蕴含多样的信息量, 贴近广大学生的学习实际, 给学生提供了不同思维的发挥空间, 同时为学生分析问题和解决问题提供了多种思路和方法. 试题有效考查了直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养, 以及化归与转化思想, 体现了课标对立体几何教学的知识要求和能力要求.

【试题出处】 2026 年高考数学全国 II 卷第 17 题

【试题】

在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\cos B = \frac{3}{4}$, $\cos^2(A+C) + \sin A \sin C = 1$.

(1) 证明: $\triangle ABC$ 为钝角三角形;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

【参考答案】

(1) 由题设得 $\sin A \sin C = \sin^2(A+C) = \sin^2 B$, $\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$, 故 $\sin A \sin C = \frac{7}{16}$. 因为 $\cos B = -\cos(A+C) = \sin A \sin C - \cos A \cos C$, 所以 $\cos A \cos C = \sin A \sin C - \cos B = -\frac{5}{16}$. 因此 $\cos A < 0$ 或 $\cos C < 0$, 所以 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

(2) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 由题设得 $\frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$, 故 $ac = 2$.

由 $\cos^2(A+C) + \sin A \sin C = 1$ 和正弦定理得 $ac = b^2$, 故 $b^2 = 2$. 由余弦定理得 $a^2 + c^2 = b^2 + 2ac \cos B = 5$, 故 $(a+c)^2 = 9$. 因此 $a+c = 3$, $b = \sqrt{2}$, 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3 + \sqrt{2}$.

【考查目标】

试题考查三角函数恒等变换、正弦定理和余弦定理等解三角形的基本知识和方法, 考查学生的直观想象、逻辑推理和数学运算等核心素养.

【试题分析】

(1) 根据三角形的内角情形, 三角形分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形, 其内角的余弦取值可以作为判定三角形形状的依据. 由题设条件可以看出角 A 和 C 是对称的, 所以试题中三角形有角 A 或角 C 为钝角两种情形, 直接求出一个角 A 或角 C 余弦值不一定能判定出三角形的形状, 因此确定 $\cos A \cos C$ 的正负是证明的关键. 证明过程见参考答案.

(2) 根据已知三角形面积和 $\sin B$ 的条件, 可得三角形两边之积 $ac = 2$,

并由正弦定理可得 $b=\sqrt{2}$. 又由余弦定理可计算出 $a^2+c^2=b^2+2ac\cos B=5$, 因此可得 $(a+c)^2=9$. 故 $\triangle ABC$ 的周长 $a+b+c=3+\sqrt{2}$.

【试题亮点】

解三角形是高中数学的基础内容之一, 突出体现了几何直观与代数运算之间的融合, 即通过代数表达式来体现三角形的边角关系.

试题以三角形内角的正弦和余弦取值及其关系为题面, 通过正弦、余弦的恒等变换, 再联立方程, 求出内角余弦值, 从而判定三角形的形状, 完成第(1)问证明. 第(2)问附加三角形面积条件后, 可得到三角形边的等式, 进而可求出三角形的周长.

试题条件中角 A 和角 C 是对称的, 所以试题中三角形有两种情形, 而且直接求出 A 的余弦值不一定能判定出三角形的形状, 因此确定 $\cos A \cos C$ 和 $a+c$ 的取值, 可以减少运算的复杂度.

试题突出考查基础性、灵活性、创新性, 考查学生的数学核心素养, 契合考试评价改革后新的评价要求. 试题具有很好的区分度, 有利于选拔创新人才.

【试题出处】2026 年高考数学全国 II 卷第 18 题

【试题】

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, 过 E 的右焦点且与 x 轴垂直的直线被

E 截得的线段长为 $\sqrt{2}$.

(1) 求 E 的离心率;

(2) 设 O 为坐标原点, 给定点 $G(t, 0) (t \neq 0)$, $A(x_0, y_0) (y_0 \neq 0)$ 为

E 上的点, 过 A 作 y 轴的垂线, 垂足为 B . 直线 OA 与直线 GB 的交点为 P , 当 A 在 E 上运动时, 点 P 的轨迹为 M .

(i) 求 M 的方程;

(ii) 当 t 为何值时, M 有对称中心? 当 M 有对称中心时, 将 M 平移后得到曲线 M' , 使得 O 为 M' 的对称中心, 说明 M' 是什么曲线.

【参考答案】

(1) 由题设可得 $\frac{a^2-1}{a^2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$, 解得 $a = \sqrt{2}$, 所以 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) (i) 由(1)知 E 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

直线 OA 的方程为 $y_0x - x_0y = 0$, 直线 GB 的方程为 $y_0x + ty - ty_0 = 0$, 由题意知 $t+x_0 \neq 0$.

$$\text{设 } P(X, Y), \text{ 由 } \begin{cases} y_0x - x_0y = 0, \\ y_0x + ty - ty_0 = 0 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} X = \frac{tx_0}{t+x_0}, \\ Y = \frac{ty_0}{t+x_0}, \end{cases} \text{ 故 } \begin{cases} x_0 = \frac{tX}{t-X}, \\ y_0 = \frac{tY}{t-X}. \end{cases}$$

因为 A 在 E 上, 所以 $\left(\frac{tX}{t-X}\right)^2 + 2\left(\frac{tY}{t-X}\right)^2 = 2$, 整理得

$$(t^2-2)X^2 + 4tX + 2t^2Y^2 - 2t^2 = 0.$$

所以 M 的方程为 $(t^2-2)x^2 + 4tx + 2t^2y^2 - 2t^2 = 0 (y \neq 0)$.

(ii)

当 $t = \sqrt{2}$ 时, M 的方程为 $y^2 = -\sqrt{2}x + 1 (y \neq 0)$, M 没有对称中心.

当 $t = -\sqrt{2}$ 时, M 的方程为 $y^2 = \sqrt{2}x + 1 (y \neq 0)$, M 没有对称中心.

当 $t \neq \pm\sqrt{2}$ 时, M 的方程为 $(t^2-2)\left(x + \frac{2t}{t^2-2}\right)^2 + 2t^2y^2 - \frac{2t^4}{t^2-2} = 0 (y \neq 0)$.

若点 (x_1, y_1) 满足 M 的方程, 则点 $\left(-x_1 - \frac{4t}{t^2-2}, -y_1\right)$ 也满足 M 的方程. 所

以 M 有对称中心, 点 $\left(-\frac{2t}{t^2-2}, 0\right)$ 为其对称中心. 故当 $t \neq \pm\sqrt{2}$ 时, M' 的方程为 $(t^2-2)x^2 + 2t^2y^2 = \frac{2t^4}{t^2-2} (y \neq 0)$.

当 $|t| > \sqrt{2}$ 时, $t^2-2 \neq 2t^2$, $t^2-2 > 0$, 此时 M' 为椭圆去掉左、右顶点.

当 $0 < |t| < \sqrt{2}$ 时, $t^2-2 < 0$, 此时 M' 为双曲线去掉两个顶点.

【考查目标】

试题考查椭圆的基本知识和基本概念, 以及直线与直线的位置关系. 试题突出考查了解析几何的基本思想和基本方法, 考查学生利用曲线的代数方程分析曲线的几何性质的方法, 以及数学运算能力、逻辑推理能力和创新能力.

【试题分析】

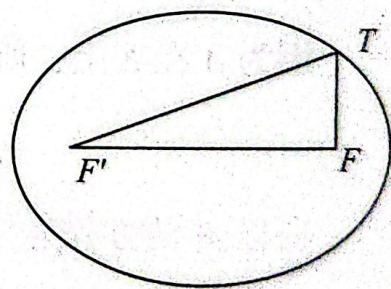
(1) 思路 1 利用椭圆的代数方程, 过程同参考答案.

思路 2 利用椭圆的几何定义.

设 F', F 分别为椭圆的左、右焦点, $TF \perp FF'$, T 在椭圆上. 在 $\text{Rt}\triangle TFF'$ 中, 由勾股定理得

$$(2\sqrt{a^2-1})^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(2a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \text{ 解得 } a = \sqrt{2},$$

所以 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



(2) 思路 消去动点参数得到轨迹方程, 观察轨迹方程的对称性.

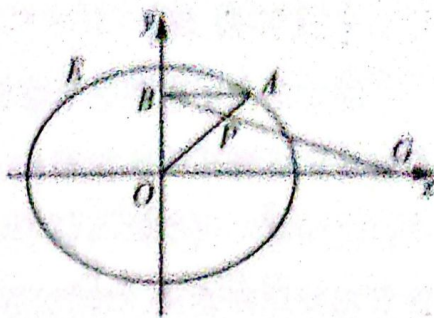
动点 $P(X, Y)$ 与 $A(x_0, y_0)$ 可以相互表示, 即 $\begin{cases} x_0 = f(X, Y) \\ y_0 = g(X, Y) \end{cases}$, 利用

$A(x_0, y_0)$ 满足已有的椭圆方程, 可以得到 $P(X, Y)$ 满足的方程.

上述这一部分是解析几何中轨迹问题的基本思想和方法.

M 的方程为 $(t^2-2)x^2+4tx+2t^2y^2-2t^2=0 (y \neq 0)$. 通过观察 M 的方程, 容易发现方程是一个标准圆锥曲线平移的结果.

当 $t = \pm\sqrt{2}$ 时, M 的方程为 $y^2 = \mp\sqrt{2}x + 1 (y \neq 0)$, 这是抛物线的平移, 是无心曲线.



当 $t \neq \pm\sqrt{2}$ 时, M 的方程为 $(t^2-2)\left(x + \frac{2t}{t^2-2}\right)^2 + 2t^2y^2 - \frac{2t^4}{t^2-2} = 0 (y \neq 0)$.

若点 (x_1, y_1) 满足 M 的方程, 则 $(t^2-2)\left(x_1 + \frac{2t}{t^2-2}\right)^2 + 2t^2y_1^2 - \frac{2t^4}{t^2-2} = 0$, 从而

$$(t^2-2)\left(-x_1 - \frac{2t}{t^2-2}\right)^2 + 2t^2y_1^2 - \frac{2t^4}{t^2-2} = 0, \text{ 即 } (t^2-2)\left[\left(-x_1 - \frac{4t}{t^2-2}\right) + \frac{2t}{t^2-2}\right]^2 + 2t^2y_1^2 -$$

$\frac{2t^4}{t^2-2} = 0$, 因此点 $\left(-x_1 - \frac{4t}{t^2-2}, -y_1\right)$ 也满足 M 的方程. 所以 M 有对称中心, 点

$\left(-\frac{2t}{t^2-2}, 0\right)$ 为其对称中心.

需要说明的是, 这里只证明了点 $\left(-\frac{2t}{t^2-2}, 0\right)$ 是 M 的对称中心, 并没有证明 M 只有一个对称中心. 考虑到曲线的性质不依赖曲线的平移而改变, 所以找到曲线的一个对称中心作平移, 然后研究曲线的性质, 并不影响问题的解决.

由以上可知, 当 $t \neq \pm\sqrt{2}$ 时, M' 的方程为 $(t^2-2)x^2 + 2t^2y^2 = \frac{2t^4}{t^2-2} (y \neq 0)$.

此时, M' 的方程是一个无交叉项、无一次项的二元二次方程, 二次项系数同号是 M' 的方程表示的曲线是椭圆的必要条件, 二次项系数异号是 M' 的方程表示的曲线是双曲线的必要条件.

当 $|t| > \sqrt{2}$ 时, $t^2-2 \neq 2t^2$, $t^2-2 > 0$, 此时 M' 为椭圆去掉左、右顶点.

当 $0 < |t| < \sqrt{2}$ 时, $t^2-2 < 0$, 此时 M' 为双曲线去掉两个顶点.

【试题亮点】

题设给出了椭圆的半短轴长和一条垂直椭圆长轴的焦点弦长,由此很容易求得椭圆的半长轴长 a ,从而求出椭圆的离心率.第(2)问设置一个轨迹问题,其中第(1)问是求轨迹的方程,第(2)问是考查学生是否理解方程的几何意义.试题很好地体现了高中数学课程中对于解析几何学习与考查的要求,符合学生的学习实际,难度适中,计算量不大.试题重点考查学生对曲线与方程关系的理解,利用曲线的代数方程研究曲线的几何特征的基本方法,以及学生的分析问题、解决问题的能力及数学运算能力,给学生提供了不同思维的发挥空间,有利于学生的正常发挥,符合考试评价改革对于基础性、综合性和创新性的考查要求,有利于创新人才的选拔.试题包含如下亮点.

(1)试题注重基础性考查.圆锥曲线的基本概念和标准方程是圆锥曲线的基础知识和基本技能,试题的第(1)问可以有两种求解方法.思路1基本上是代数思想的运用,重点在于找到椭圆上一个点的坐标,利用方程解决问题.思路2是几何思想的运用,充分利用椭圆的几何定义.

(2)试题注重考查解析几何的基本思想方法.圆锥曲线的研究经历了四个历史阶段.第一阶段是公元前古希腊阿波罗尼奥斯阶段,其代表作为《圆锥曲线论》.阿波罗尼奥斯用纯平面几何的方法证明了几乎所有的圆锥曲线的性质,使得后面的数学家几乎对圆锥曲线的几何性质没有新的贡献.第二阶段是法国哲学家笛卡尔的《几何学》.1637年笛卡尔第一次用代数方程的方法解决了帕波斯问题,标志着近代数学的开端,也标志着解析几何的创立,由此开启了用代数方程研究几何问题的历史,这也是中学解决几何问题的重点.第三阶段是德沙格、帕斯卡、拉伊尔等用射影几何的方法统一研究圆锥曲线.第四阶段是欧拉用二次曲线统一研究圆锥曲线.中学数学课程中的圆锥曲线理论主要是学习第二阶段的部分内容,即把圆锥曲线看成是方程与曲线的统一体.在“直线与圆”“椭圆”“双曲线”以及“抛物线”等章节的学习中,都要经历求曲线的轨迹方

程的问题,这一过程就好比笛卡尔求解帕波斯问题一样,是解析几何的经典问题,也是解析几何创立的基础.试题回归解析几何的本原,考查学生对解析几何基本思想方法的掌握.

(3)试题注重与高中教学实际的联系.考虑到课标对圆锥曲线的要求,只要求学生掌握圆锥曲线的标准方程,因此试题在第(2)问中的第(i)问中,要求学生求出轨迹 M 的方程,这个过程是基本知识和基本技能的考查.对 M 的方程的几何意义的理解是考查重点,放在了第(2)问中的第(ii)问中.为了降低学生的运算量,试题设置的结果是标准的圆锥曲线的平移,平移不改变图形的几何意义和几何性质,只改变图形(曲线)的坐标位置(代数表示).尽管最后得到的 M 的方程看起来比较复杂(含参数 t),但容易发现曲线 M 是关于 x 轴对称的,而不关于 y 轴对称,根据这些几何性质,结合初中关于平移的几何知识和高中关于函数图像的平移知识,就容易发现所求曲线 M 的方程是标准方程的平移,从而判断参数 t 为何值时,曲线 M 有对称中心.

试题并不要求证明曲线 M 只有一个对称中心,而是找到一个对称中心即可.这是两个不同的数学问题,其数学逻辑也是不一样的.一般地,某曲线存在一个对称中心,该曲线一定是中心对称图形,但中心对称图形,可能会有很多对称中心(不止一个对称中心,比如正弦曲线).根据曲线 M 的方程,找到一个对称中心是不难的.所以试题为了降低学生的计算量,只考查学生判断曲线 M 是否有对称中心,即曲线 M 是否是中心对称图形,而没有要求证明曲线 M 有唯一的对称中心.当然有能力的学生可以证明曲线 M 只有唯一的对称中心.

【试题出处】2026 年高考数学全国 II 卷第 19 题

【试题】

已知函数 $f(x) = xe^x + ax + b$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = -2x + 1$.

(1) 求 a, b ;

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x+m) - f(x) > m$, 求 m 的取值范围;

(3) 当 $x > 0$ 时, $f(k+x) + f(k-x) > 2f(k)$, 求 k 的最小值.

【参考答案】

(1) 解法 1 由题设可得 $f(0) = b$, $f'(x) = (x+1)e^x + a$, 故 $f'(0) = a+1$, 于是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y - b = (a+1)x$, 即 $y = (a+1)x + b = -2x + 1$, 所以 $a = -3$, $b = 1$.

解法 2 因为点 $(0, f(0))$ 在切线 $y = -2x + 1$ 上, 所以 $f(0) = b = 1$. 又 $f'(x) = (x+1)e^x + a$, 则 $f'(0) = a+1 = -2$, 故 $a = -3$.

故 $a = -3$, $b = 1$.

(2) 设函数 $F(x) = f(x+m) - f(x) - m$, 则 $F(x) = xe^x(e^m - 1) + m(e^{x+m} - 4)$.

若 $m = 0$, 则有 $0 = f(x) - f(x) > 0$, 产生矛盾.

若 $m < 0$, 则当 $x > 0$ 时, $F(x) < m(e^{x+m} - 4)$, 故当 $x > 2\ln 2 - m$ 时, $F(x) < m(e^{x+m} - 4) < 0$, 从而 $f(x+m) - f(x) < m$, 与题设矛盾.

若 $m > 0$, 则 $xe^x(e^m - 1)$ 和 $m(e^{x+m} - 4)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 都单调递增, 故 $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增. 由题设可知, 当 $x > 0$ 时, $F(x) > 0$, 则 $F(0) = m(e^m - 4) \geq 0$, 故 $m \geq 2\ln 2$. 因此, 当 $m \geq 2\ln 2$, $x > 0$ 时, $F(x) > F(0) \geq 0$, 此时 $f(x+m) - f(x) > m$.

综上, m 的取值范围是 $[2\ln 2, +\infty)$.

(3) 解法 1 设函数 $G(x) = e^{-k}(f(k+x) + f(k-x) - 2f(k)) = (k+x)e^x + (k-x)e^{-x} - 2k$, 则 $G(0) = 0$, 由题意知, 当 $x > 0$ 时, $G(x) > 0$.

设 $H(x) = G'(x) = (k+1+x)e^x - (k+1-x)e^{-x}$, 则 $H'(x) = (k+2+x)e^x + (k+2-x)e^{-x} = (k+2)(e^x + e^{-x}) + x(e^x - e^{-x})$.

若 $k \geq -2$, 则当 $x > 0$ 时, $H'(x) > 0$, 所以 $H(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增. 故当 $x > 0$ 时, $G'(x) = H(x) > H(0) = 0$, $G(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增. 因此当 $x > 0$ 时, $G(x) > 0$, 即 $f(k+x) + f(k-x) > 2f(k)$, 符合题意.

若 $k < -2$, 则当 $x \in (0, -(k+2))$ 时, $H'(x) < 0$, 所以 $H(x)$ 在区间 $(0, -(k+2))$ 单调递减. 故当 $x \in (0, -(k+2))$ 时, $G'(x) = H(x) < H(0) = 0$, $G(x)$ 在区间 $(0, -(k+2))$ 单调递减. 因此当 $x \in (0, -(k+2))$ 时, $G(x) < 0$, 不符合题意.

综上, k 的最小值为 -2 .

解法 2 由于 $f(k+x) + f(k-x) - 2f(k) = e^k(1-e^{-x})(k(e^x-1) + x(e^x+1))$, 因此当 $x > 0$ 时, $f(k+x) + f(k-x) > 2f(k)$ 等价于 $K(x) = k(e^x-1) + x(e^x+1) > 0$.

设函数 $L(x) = K'(x) = (k+1+x)e^x + 1 (x > 0)$, 则 $L'(x) = (k+2+x)e^x$.

若 $k \geq -2$, 则当 $x > 0$ 时, $L'(x) > 0$, 所以 $L(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增, 故当 $x > 0$ 时, $K'(x) > L(0) = k+2 \geq 0$, 从而 $K(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增, 因此当 $x > 0$ 时, $K(x) > K(0) = 0$, 即 $f(k+x) + f(k-x) > 2f(k)$, 符合题意.

若 $k < -2$, 则当 $x \in (0, -(k+2))$ 时, $L'(x) < 0$, 故 $L(x)$ 在区间 $(0, -(k+2))$ 单调递减, 此时 $K'(x) < L(0) < 0$, 从而 $K(x)$ 在区间 $(0, -(k+2))$ 单调递减, 因此当 $x \in (0, -(k+2))$ 时, $K(x) < 0$, 不符合题意.

综上, k 的最小值为 -2 .

【考查目标】

试题以指数函数和幂函数为载体考查函数的导数及其在不等式问题方面的应用, 重点考查如何利用导函数的性质来反映原函数的单调性和极值问题等性质. 试题着重考查学生的数学抽象、逻辑推理、数学运算等能力以及综合运用所学知识分析问题解决问题的能力, 解答体现了化

归与转化、数形结合、函数与方程等数学思想.

【试题分析】

(1) 思路 对函数 $f(x)$ 直接求导, 便可得到曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的斜率, 再用点斜式得到切线方程, 与直线 $y=-2x+1$ 作比较, 就能得到 a, b 的值.

(2) 思路 分情况对辅助函数 $F(x)=f(x+m)-f(x)-m$ 的单调性进行讨论, 得到参数 m 的取值范围. 过程同参考答案.

(3) 思路 借助 $f(x)$ 的表达式, 发现 $f(k+x)+f(k-x)-2f(k)$ 有比较简单的表达式, 通过分析恰当选取的辅助函数的单调性, 并分类讨论确定满足题设的参数 k 的可能取值, 得到参数 k 的取值范围, 从而得到 k 的最小值.

【试题亮点】

导数是研究函数单调性、极值和最值、零点及不等关系的最有效工具之一, 是数学学科最基本的必备知识和主干知识, 也是综合考查数学能力与素养的有效载体.

利用导函数的性质来反映原函数的单调性和极值性质是导数应用的主要方向. 试题以指数函数和幂函数为载体, 讨论涉及函数的不等式, 综合考查学生的数学抽象、逻辑推理、数学运算等能力以及综合运用所学知识分析问题解决问题的能力. 具备化归与转化、数形结合、函数与方程等数学思想的学生, 采用通性通法便可顺利作答, 但后两问的解答需要具备较好化简求值能力和逻辑推理能力.

试题分层设问, 从易到难, 逐步递进, 引导学生重视思维, 理性判断, 具有较高的综合性. 试题后两问逻辑性强, 考查由浅入深, 基于必要的计算, 思维深度逐步提升, 递进的设问使得不同层次的学生都有发挥的空间, 具有较好的区分度和选拔功能. 试题考查导数应用的主干知识, 有利于引导高中数学对相关知识板块的教学.